República Federativa do Brasil
Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços
Instituto Nacional da Propriedade Industrial

(21) BR 202014021337-1 U2

* B R 2 0 2 0 1 4 0 2 1 3 3 7 U

(22) Data do Depósito: 28/08/2014

(43) Data da Publicação: 18/07/2017

(54) Título: KIT EDUCACIONAL DE MATEMÁTICA

(51) Int. Cl.: G09B 23/02; G09B 1/00

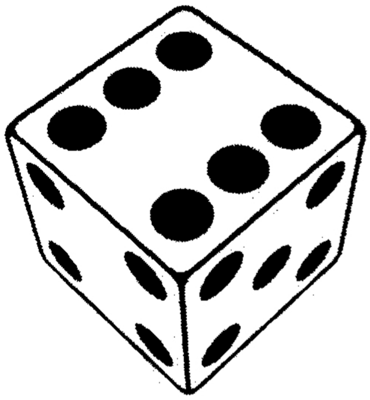
(52) CPC: G09B 23/02,G09B 1/00

(73) Titular(es): UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP

(72) Inventor(es): VANDERLEI SALVADOR BAGNATO; HENRIQUE EISI TOMA; BEATRIZ LEONOR SILVEIRA BARBUY

(74) Procurador(es): MARIA APARECIDA DE SOUZA

(57) Resumo: KIT EDUCACIONAL DE MATEMÁTICA O presente modelo de utilidade se refere a um kit educacional de matemática, destinado a introduzir/explicar conceitos básicos sobre probabilidade através do manuseio de seus elementos, tais como dados, dispositivo amigo secreto, dispositivo chocalho, papel milimetrado e tabuleiro, que pode ser utilizado tanto em ambiente escolar, quanto em outros locais, tais como a residência do aluno.



KIT EDUCACIONAL DE MATEMÁTICA

CAMPO DA INVENÇÃO

[001] O presente modelo de utilidade se insere no campo do Ensino, mais especificamente no campo da Matemática, uma vez que se refere a um kit educacional destinado a introduzir/ensinar conceitos básicos sobre probabilidade, explorando experimentos e teorias em conjunto, podendo ser utilizado em salas de aula ou em qualquer outro local.

DESCRIÇÃO DO ESTADO DA TÉCNICA

Fundamentos da Invenção

[002] Atualmente, o ensino da matemática é majoritariamente realizado em salas de aula através de ensinamentos teóricos, fornecidos pelo professor aos seus alunos por meio da fala em conjunto com livros e exercícios. Em poucos casos, sobretudo no ensino fundamental, são aplicados métodos de ensino prático em laboratórios e/ou com experimentos.

[003] Dessa forma, existe uma carência de ensinamentos práticos de matemática, sobretudo ao aluno do ensino fundamental, uma vez que existem poucos produtos, equipamentos ou materiais destinados a abordar assuntos relacionados à referida matéria utilizando conteúdo prático científico de cunho laboratorial e experimental que possam ser utilizados tanto em salas de aula quanto em qualquer outro lugar, como por exemplo, em casa.

Conceitos Básicos de Probabilidade

[004] A matemática das probabilidades nasceu para ajudar os apostadores em “jogos de azar”, tendo sida desenvolvida na segunda metade do século XVII, por Pierre

de Fermat, Blaise Pascal, Christian Huygens, Jakob Bernoulli e Abraham de Moivre, depois do trabalho pioneiro de Girolamo Cardano, no século XVI.

[005] No início do século XVIII, a probabilidade já era um ramo da matemática, assim como a geometria, a álgebra e o cálculo. A teoria das probabilidades sofreu, no início, com sua associação aos jogos e apostas. Era uma motivação pouco nobre e contradizia as superstições dos jogadores. Hoje em dia é impossível pensar na ciência sem ela. Embora lide com o acaso, a probabilidade representa a base da solidez financeira das companhias de seguros.

[006] É importante entender que a teoria matemática das probabilidades é um modelo inspirado em fenômenos do mundo real. Como ramo da matemática, sua consistência não pode ser contestada, uma vez que já está bem estabelecida.

[007] Já seu uso prático pode ou não estar de acordo com a situação à qual procuramos aplicá-la. Nesse sentido, não devemos confundir probabilidade com a área da ciência chamada estatística, que aplica a teoria das probabilidades a dados numéricos do mundo real, levando a previsões sobre eventos futuros, que podem não ser verificadas se os dados ou hipóteses empregadas não forem corretos.

Documentos do Estado da Técnica

[008] O documento MU7701776-5 de 01/10/97 refere-se a uma disposição construtiva aplicada a kit geométrico, a ser utilizado nas áreas de matemática, química, física e desenho, sendo um brinquedo educacional. O referido kit é constituído por articulações formadas por hastes, peças

circulares, pinos e formadores de ângulos, que permitem formar figuras geométricas.

[009] O documento PI1002745-9 de 23/08/10 refere-se a um kit de materiais didáticos para ensino de matemática, constituído de diversas peças com diversos formatos: hastes perfuradas ou não, sendo algumas com ranhuras de diversas espessuras e comprimentos; peças em formato circular com diversos diâmetros e perfurações; peças com formato oval ou retangular; hastes em fora de "T"; e placas perfuradas. As referidas peças se encaixam entre si, através de parafusos, formando peças geométricas, auxiliando no ensino da matemática.

[010] O documento US5873729 de 19/02/97 refere-se a um kit de triângulo matemático, constituído de três conjuntos de blocos de vários tamanhos e cores de triângulos, a serem manipulados, desenvolvendo habilidades, matemáticas, como frações, multiplicação, trigonometria e geometria.

[011] O documento US2012003617 descreve um kit para resolução de cálculos matemáticos baseado no jogo de Bingo. O kit apresenta uma pluralidade de placas, cada uma com uma matriz de cinco por cinco com quadrados preenchidos por equações, além de uma circunferência dividida em 100 segmentos que permite a geração de uma combinação número/letra necessária para a realização do jogo.

[012] O documento KR20110007996 descreve um kit para fixação dos conceitos de probabilidade.

[013] O documento TWM427184 descreve um kit para resolução de problemas matemáticos e se vale do lançamento de dados.

[014] O documento US5273430 descreve um jogo matemático contendo uma pluralidade de áreas circulares, e uma pluralidade de dados, com o objetivo de fixar conceitos matemáticos.

[015] Ainda que tenham sido encontrados documentos que possuam alguns elementos em comum o kit matemático apresentado no presente modelo de utilidade, é válido ressaltar que tanto o conceito inventivo, quanto o kit na sua totalidade e a forma de alcançar os resultados desejados variam substancialmente no que diz respeito aos documentos acima mencionados.

Objetivos da Invenção

[016] O objetivo do presente modelo de utilidade é apresentar um conjunto de componentes destinados a investigar as probabilidades matemáticas de forma a apresentar um kit prático, com componentes simples, de baixo custo de aquisição e com característica educacional científica, que pode ser utilizado em qualquer lugar, em especial em instituições de ensino ou na residência do aluno, com intuito de introduzir, ensinar e fixar conceitos de probabilidade.

Vantagens da Invenção

[017] O presente modelo de utilidade contribui para o aperfeiçoamento da educação, suprindo a carência de equipamentos laboratoriais e práticas experimentais no que diz respeito ao ensino e fixação de conceitos de probabilidade, estimulando a curiosidade dos alunos e o seu interesse pela compreensão da natureza e do mundo em que vivemos, bem como estimulando a paixão pela descoberta.

BREVE DESCRIÇÃO DA INVENÇÃO

[018] O presente modelo se utilidade se refere a um kit educacional de matemática, destinado a introduzir/explicar conceitos básicas sobre probabilidade, explorando experimentos e teorias em conjunto, promovendo o seu uso prático, estimulando o aluno do ensino fundamental.

BREVE DESCRIÇÃO DOS DESENHOS

[019] A figura 1 é uma representação gráfica exemplificativa de dado em formato de cubo com 04 faces.

[020] A figura 2 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado em formato octaedro de 08 faces.

[021] A figura 3 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado em formato dodecaedro de 12 faces.

[022] A figura 4 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado em formato icosaedro de 20 faces.

[023] A figura 5 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado de 10 faces.

[024] A figura 6 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado em formato cuboctaedro sem marcações nas faces.

[025] A figura 7 é uma representação gráfica exemplificativa de um dado em formato octaedro de 08 faces com marcação de pontos cardeais em suas faces.

[026] A figura 8 é uma representação gráfica exemplificativa de um tabuleiro quadriculado.

[027] A figura 9 é uma representação gráfica exemplificativa de um exemplo de um papel milimetrado.

[028] A figura 10 é uma representação gráfica exemplificativa, com vista explodida, do dispositivo

denominado de “amigo secreto/oculto” com 07 (sete) esferas/bolas em seu interior.

[029] A figura 11 é uma representação gráfica exemplificativa do dispositivo denominado de “amigo secreto/oculto” com 07 (sete) esferas/bolas em seu interior.

[030] A figura 12 é uma representação gráfica exemplificativa, com vista explodida, do dispositivo denominado de “chocalho”.

[031] A figura 13 é uma representação gráfica exemplificativa do dispositivo denominado de “chocalho” com esferas/bolas no seu interior.

[032] A figura 14 é uma representação gráfica exemplificativa, com vista em perspectiva, do dispositivo denominado de “chocalho” com esferas/bolas no seu interior.

DESCRIÇÃO DETALHADA DA INVENÇÃO

[033] O presente modelo de utilidade se refere a um kit educacional de matemática que compreende os seguintes componentes: no mínimo 10 (dez) dados comuns de 6 (seis) faces menores, conforme exemplificado na figura 1; no mínimo 02 (dois) dados comuns de 6 (seis) faces maiores, conforme exemplificado na figura 1, de duas cores diferentes; no mínimo 01 (um) dado em forma de octaedro, com marcação de 1 a 8, conforme exemplificado na figura 2; no mínimo 01 (um) dado em forma de dodecaedro com marcação de 1 a 12, conforme exemplificado na figura 3; no mínimo 01 (um) dado em forma de icosaedro, numerado de 1 a 20, conforme exemplificado na figura 4; no mínimo 02 (dois) dados de 10 faces numerados de 0 a 9, conforme exemplificado na figura 5; no mínimo 01 (um) dado em forma

de cuboctaedro, sem marcação nas faces, conforme exemplificado na figura 6; no mínimo 02 (dois) dados em forma de octaedro marcados com 08 pontos cardeais, conforme exemplificado na figura 7; no mínimo 01 (um) tabuleiro, com desenho quadriculado em toda a sua superfície, conforme exemplificado na figura 8; folhas de papel milimetrado, conforme exemplificado na figura 10; no mínimo 03 (três) dados em forma de cubo com as marcações numerais: 2-4-9, 1-6-8, 3-5-7 ou com outras combinações probabilísticas; no mínimo 01 (um) dispositivo denominado de "amigo secreto" (1), conforme exemplificado na figura 11; no mínimo 03 (três) dispositivos denominados "chocalho", conforme exemplificado na figura 12.

[034] O dispositivo denominado "amigo secreto" (1), exemplificado nas figuras 10 e 11, tem formato retangular, e é constituído por porção superior (1a), porção inferior (1b), possuindo no mínimo 07 (sete) orifícios de formato circular na junção da porção superior (1a) e da porção inferior (1b). Seu interior é oco, contendo no mínimo 07 (sete) bolas/esferas coloridas (2), todas de cores distintas. Possui também, na face superior (1a) do dispositivo, no mínimo 07 (sete) marcações de formato circular (3), que devem coincidir com as cores das esferas coloridas (2) contidas no interior do dispositivo "amigo secreto" (1), sendo obrigatoriamente as cores distintas entre si. É válido ressaltar que o dispositivo "amigo secreto" deve possuir o mesmo número de orifícios, marcações circulares e bolas em seu interior.

[035] O dispositivo "chocalho", conforme exemplificado nas figuras 12, 13 e 14, tem formato

cilíndrico, sendo a metade superior com formato cilíndrico de maior diâmetro (4), na proporção de 3:1 da outra metade, inferior, que possui diâmetro menor (5), apresentando na metade inferior dois orifícios de formato circular (6), sendo o seu interior é oco, contendo esferas/bolas. O kit compreende no mínimo 03 (três) dispositivos "chocalho", de cores distintas entre si, contendo 04, 05 e 06 esferas/bolas em cada um respectivamente, em duas cores A e B, sendo que o chocalho de 04 esferas apresenta duas esferas da cor A e duas da cor B; o chocalho de 05 esferas apresenta duas esferas da cor A e três da cor B; e o chocalho de 06 esferas apresenta quatro esferas da cor A e duas da cor B.

[036] Todos os elementos do kit, excetuando-se o papel milimetrado, podem ser confeccionados de material plástico resistente, ou quaisquer outros materiais que possam ser livremente manuseados por crianças. O tabuleiro é preferencialmente confeccionado em papelão, mas pode, opcionalmente, ser confeccionado de material plástico resistente, ou de qualquer outro material que possa ser livremente manuseados por crianças.

<u>Exemplos de Concretização da Invenção</u>

[037] Utilizando os elementos que compõem o kit, é possível realizar experimentos matemáticos com intuito de investigar/ensinar/fixar conceitos de probabilidade. Entre esses experimentos, destacam-se, de forma não limitante, os exemplos abaixo.

Fundamentos teóricos para entendimento dos exemplos

[038] Os ensinamentos teóricos demonstrados abaixo podem servir para auxiliar na compreensão dos exemplos que

objetivam demonstrar a utilização prática do presente modelo de utilidade.

[039] Podemos utilizar como exemplo um dado simples, em forma de cubo, com faces numeradas de 1 a 6, supondo que o dado é totalmente homogêneo e simétrico e em particular não conseguimos distinguir uma face da outra, a não ser por sua numeração. O que torna o lançamento de um dado aquilo que chamamos de um “processo aleatório” é o fato de que não temos um controle exato sobre como fazemos os lançamentos e pequenas modificações na forma como jogamos já são suficientes para produzir resultados distintos. Desta forma, a modelagem mais simples e prática do lançamento de um dado é dizer que todas as faces têm iguais “chances” de terminarem viradas para cima.

[040] Um dado pode, assim, ser usado como um simulador de lançamento de uma moeda, bastando dizer que saiu 'cara' quando o dado apresentou um número entre 1, 3 e 5, cuja probabilidade é 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2; ou “coroa” quando o dado apresentou os números pares 2, 4 e 6.

[041] Passemos ao lançamento de dois dados. Temos agora muito mais possibilidades de ocorrências. Podemos ter pares de resultados iguais, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 e 6-6, e pares de resultados diferentes, como 1-2, 4-6, etc. Uma dúvida pertinente é se devemos considerar 2-5 e 5-2, digamos, como resultados diferentes. A pergunta pode admitir duas respostas. E é interessante que o esclarecimento dessa questão apareceu um século antes do período de nascimento da teoria das probabilidades, no trabalho de Girolamo Cardano intitulado “Livro sobre Jogos de Azar”, que foi publicado em 1526.

[042] De fato, ao jogarmos os dados e não os distinguirmos um do outro, apenas é possível citar o resultado como um par sem ordenamento. Não há diferença entre 2-5 e 5-2, porque em ambos os casos o 2 e o 5 saíram. Se, diferentemente, jogássemos cada dado em uma mesa distinta, aí sim poderíamos dizer que há uma diferença entre 2-5 e 5-2, porque estaríamos distinguindo um dado do outro, por exemplo, dizendo "o dado da esquerda e o dado da direita". Se não considerarmos o ordenamento, são 21 possibilidades, no entanto, se considerarmos o ordenamento são 36 pares possíveis.

[043] Já vimos anteriormente que o lançamento de um dado simples pode servir como um simulador de cara e coroa, bastando associar três números a cara e os outros três números a coroa. Mas há várias outras formas de simulação: pode-se pegar qualquer dado em formato de poliedro e associar metade dos números a cara e a outra metade a coroa (todos eles têm um número par de lados). O icosaedro parece ser o melhor para isso, pois é o que rola com mais facilidade.

[044] Por outro lado, essa forma de simular cara e coroa tem a vantagem de permitir que também criemos jogos de cara e coroa desonestos, atribuindo probabilidades diferentes para um e para outro, digamos p *e* $1 - p$. Por exemplo, se, no lançamento de um dado simples, decidirmos atribuir cara para os números 1 e 2 e coroa para os números 3, 4, 5 e 6, então teremos $p =$ de chance de obter cara *e* $1 - p =$ de chance de obter coroa. Com todos os dados do presente modelo de utilidade é possível bolar vários jogos de cara e coroa com valores bastante variados de p.

[045] Um dos famosos trabalhos de Albert Einstein em 1905, quando publicou a Teoria da Relatividade Restrita, diz respeito à modelagem do chamado movimento browniano. O botânico Robert Brown havia observado muitos anos antes, em 1827, que pequenas partículas de pólen na superfície de um líquido tinham um movimento errático. O que Einstein fez foi criar um modelo matemático descrevendo um movimento errático, baseado em decisões aleatórias. A analogia é com o trajeto de um bêbado que a cada passo escolhe ao acaso a direção do passo seguinte. Isso pode fazê-lo voltar várias vezes ao ponto de partida, ou afastá-lo gradualmente.

[046] Quanto às coincidências, é válido ressaltar que é razoavelmente popular a informação de que, num grupo de 23 pessoas escolhidas ao acaso, a chance de que duas delas façam aniversário no mesmo dia é um pouquinho maior do que 50%. Isso costuma surpreender muita gente, pois é fácil encontrar agrupamentos com no mínimo esse tamanho, por exemplo, num campo de futebol ou numa classe escolar.

[047] Quanto às disputas entre dois dados, ou as disputas entre dois conjuntos de dados. A pessoa A e a pessoa B têm cada um, um ou mais dados numerados, e cada rodada consiste em os dois jogarem seus dados sobre a mesa. Ganha a rodada aquele que somar o número maior entre seus dados. A pergunta, evidentemente, se refere a quem tem mais probabilidade de ganhar uma rodada, com os dados que tem. Aqui, um conjunto de dados é melhor do que outro se, ao jogar com esse outro, tem mais probabilidade de ganhar uma rodada. Pergunta-se quem é o melhor: o dado A (com números 2 - 4 - 9), o dado B (1 - 6 - 8) ou o dado C (3 - 5 - 7)?

[048] A decisão entre quem é melhor entre dois

dados se dá por comparação entre o número de maneiras que um pode ganhar e que o outro pode ganhar. Portanto a chance de o dado A ganhar é de 5/9, e a de B ganhar é de 4/9.

[049] Quanto ao sorteio de amigo secreto/oculto: Sete cores fixas são as sete pessoas que vão sortear o amigo secreto ou amigo oculto. Sete bolas dessas mesmas cores, soltas, são os "papeizinhos" do sorteio. Quando as bolas soltas retornam elas representam os papeizinhos sorteados por cada um. Ninguém pode tirar a si mesmo, essa é a regra número 1 do amigo secreto. Qual é a chance de isso não ocorrer? Se o número de amigos aumenta, o que ocorre com essa chance? Fica cada vez maior ou cada vez menor?

Exemplos

[050] Qual é a chance de sair a face 1 em muitos lançamentos de um dado honesto? É preciso saber o que acontece com uma grande série de lançamentos de um dado, em particular, testar se é verdade que em aproximadamente 1/6 dos lançamentos sai a face 1 (ou qualquer outra escolhida).

[051] Utilizando 10 dados comuns e um papel milimetrado, a proposta é fazer 1000 lançamentos. Para facilitar, no entanto, utilize um truque: em vez de fazer um lançamento por vez, faça 10 lançamentos em cada rodada, usando 10 dados idênticos. A cada vez que lançar os 10 dados imagine que lançou um único dado 10 vezes. Assim, você só precisará fazer, de fato, 100 lançamentos.

[052] Durante os lançamentos, anote os resultados numa tabela. Depois, com os resultados anotados, faça um gráfico. Uma tabela deve ser montada: Ela deve ter 4 colunas e 100 linhas. Cada linha corresponderá a uma rodada

de lançamento simultâneo de 10 dados. Conteúdo das colunas: 1ª: indicação das rodadas: 1-10, 11-20, 21-30 etc; 2ª: número de dados que saíram com a face 1 voltada para cima, na rodada correspondente à linha anotada; 3ª: total de vezes que a face 1 saiu desde o começo até a rodada correspondente à linha anotada; 4ª: divisão do valor anotado na terceira coluna pelo número total de lançamentos.

[053] Depois de 100 rodadas teremos um experimento real com 1000 dados jogados. Aí se pode fazer um gráfico dos valores da quarta coluna em função da primeira. Se a probabilidade da face 1 é de = 0,166666..., espera-se que quanto mais jogadas forem feitas mais os valores da quarta coluna se aproximarão desse valor.

[054] Outros dados que compõe o kit, em formatos diversos, possuem faces que só podem ser distinguidas com as marcações de números. São eles: o octaedro, sólido platônico com 8 faces triangulares; o dodecaedro, sólido platônico com 12 faces pentagonais; o icosaedro, sólido platônico com 20 faces triangulares; e um decaedro, sólido que não se inclui entre os platônicos, mas que tem 10 faces indistinguíveis entre si. Este último vem numerado de 0 a 9, pois é uma maneira de sortear um dígito. Com dois deles, por exemplo, é possível sortear um número entre 0 e 99.

[055] Teria como viciar o lançamento de um dado honesto, utilizando um dos dados comuns tentando controlar o lançamento para que seja sempre igual? Evidentemente não será exatamente igual, devido às limitações experimentais, mais isso pode ser aperfeiçoado de acordo com as habilidades de cada um.

[056] Utilizando um dado comum e um suporte que deve ser criado para lançar o dado, sempre da mesma altura e da mesma posição, com as faces na mesma posição. Em cada lançamento, anote o resultado da face que saiu para cima, como por exemplo: 3,4,4,6,4,4,3,5,1,4,4, ... Conte quantas vezes saiu cada uma das faces e depois divida cada um desses seis números por “N”, que é o número de lançamentos. Resultados: As faces parecem ter igual probabilidade? Os Lançamentos parecem ser mais tendenciosos para alguma face?

[057] Utilizando um dado de formato poliedro, com faces diferentes, jogamos um dado para o qual não temos uma boa hipótese sobre a probabilidade de suas faces. O dado em questão tem a forma de um poliedro chamado cuboctaedro, que possui 06 faces quadradas e 08 faces triangulares. Após lançar o cuboctaedro muitas vezes (por exemplo 1000 vezes), anote cada rodada se a face que ficou para cima é a quadrada ou a triangular, por exemplo: T, Q, Q, T, Q, T, T, T, Q, Q, T, Q, Q, Q, T, ... Para cada jogada ou a cada 10 jogadas, anote o número acumulado de vezes que saiu quadrado e divida pelo número total de jogadas.

[058] Diferentemente do dado em forma de cubo, não é razoável supor que em seu lançamento todas as faces tenham igual chance de ficarem para cima. Parece apenas razoável supor que todas as faces quadradas tenham iguais chances, e que todas as faces triangulares tenham iguais chances, mas nada parece no fazer supor que a chance de alguma face triangular específica seja igual à chance de uma quadrada específica. Se todas as 10 faces (6 quadradas, 8 triangulares) tivesse iguais chances, então a

probabilidade de sair uma quadrada seria 6/14=3/7, e a de sair uma triangular seria 8/14=4/7. O importante é se ter em mente que nem sempre sabemos com exatidão a probabilidade dos eventos.

[059] Utilizando dois dados comuns, em uma série de lançamentos de dois dados comuns, examinar a proporção entre resultados iguais e resultados diferentes. Essa experiência servirá para decidir sobre a maneira correta de pensar esse experimento, revivendo assim a origem da teoria de probabilidades.

[060] Na mesma série de lançamentos, computar as somas dos dois dados e ver quais somas é mais frequente que outras, visualizando esses resultados num gráfico chamado de *histograma*. Anote os resultados dos lançamentos de dois dados, com o máximo de jogadas que tiver paciência de fazer, por exemplo, 1000. Anote-os um por um, de forma a permitir as análises que serão propostas em seguida. Não é preciso se preocupar com a ordem (5-2 e 2-5 são a mesma coisa), mesmo porque os dados são indistinguíveis e não é clara a ordem em que eles se posicionam sobre a mesa. Dos *N* lançamentos, conte quantos apresentaram resultados iguais e quantos apresentaram resultados diferentes. Por exemplo, nos cinco lançamentos da tabela acima, foram dois resultados iguais (3-3 e 2-2) e três diferentes (5-2, 1-5 e 6-1).

[061] Para cada rodada anotada durante os lançamentos, calcule a soma dos dois dados, depois disso, faça outra tabela (desta vez, bem menor) onde na primeira linha vão os números possíveis da soma (de 2 a 12) e na segunda linha quantas vezes cada um desses números apareceu

como soma dos lançamentos de dois dados. Faça uma terceira linha dividindo esses valores pelo número total de lançamentos (para ficar entre 0 e 1) e multiplicando por 36 (para ficar entre 0 e 36). Agora desenhe um histograma desta tabela. É um diagrama formado por barras, uma para cada número de 2 a 12, de alturas proporcionais aos valores da terceira coluna.

[062] Utilizando a probabilidade de utilizar em uma rodada de 10 jogadas de cara ou coroa: Simular grupos de 10 jogadas de cara e coroa e observar a frequência com que ocorrem apenas 10 caras, ou 9 caras e 1 coroa, ou 8 caras e 2 coroas etc. Usando 10 dados em vez de moedas, será possível simular jogos honestos e desonestos de cara e coroa.

[063] A proposta é fazer muitas, por exemplo, 1000 rodadas de 10 jogadas do cara e coroa e, em cada rodada, anotar quantas vezes saiu cara. Mas a ideia é fazer dois experimentos em um só, usando dados. Portanto, o melhor a fazer é, em cada lançamento, jogar 10 dados e anotar os números que saíram em cada rodada. Para a análise que será feita depois, é melhor anotar os números em ordem, com repetições. Por exemplo, anotar 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6 significa que saíram: dois dados com o número 1, nenhum com o número 2, dois com o número 3, dois com o número 4, um com o número 5 e três com o número 6. É melhor fazer esse experimento com duas ou três pessoas. Uma para jogar os dados, outra para arrumá-los em ordem crescente e outra para anotar os números. Também é bom revezar os papéis para ninguém se cansar!

[064] Quando o jogo é honesto, é mais ou menos

claro que se esperam mais rodadas equilibradas, com 5 a 5, 6 a 4, 4 a 6, na divisão entre caras e coroas. As rodadas menos equilibradas devem aparecer menos, particularmente essas mencionadas, 0 a 10 e 10 a 0. Portanto o histograma deve ser mais ou menos parecido com o histograma da soma de dois dados, mais alto no meio e decrescendo nas pontas. Mas será que ele é daquela mesma forma? Como será que poderíamos prever, na teoria, o resultado aproximado desse experimento?

[065] Um passeio (bidimensional) de um bêbado, utilizando o dado octaedro com pontos cardeais e o tabuleiro quadriculado. Cada competidor coloca um pequeno objeto na casa central do tabuleiro e, em cada rodada, sorteia um ponto cardeal que indica a direção para onde seu objeto vai se mover. Estão fora do jogo aqueles que saírem dos limites do tabuleiro. E ganha quem restar por último ou voltar para a casa inicial. Para quem quiser pensar um pouco mais, pode começar pelo seguinte problema. De quantas formas diferentes é possível voltar para a casa central em duas rodadas? Qual é a probabilidade de voltar para a casa central em duas rodadas? É possível voltar para a casa central com qualquer número de rodadas? Analise as possibilidades de retorno para 4 jogadas. Quantas rodadas são necessárias para sair do tabuleiro? Com esse número de rodadas, qual é a probabilidade de sair do tabuleiro?

[066] Utilizando 2 dados de 10 faces, numerados de 0-9, se pode verificar qual é a chance de dois números naturais não terem fator comum. Utilizando o papel milimetrado, Monte uma tabela de 98 x 98 casas, indicando na horizontal e na vertical cada número entre 2 e 99 junto

com sua decomposição em fatores primos. Essa tabela ficará bem grande! Sugere-se colar várias folhas de papel ou usar uma cartolina. Cada casinha da tabela representa um par de números. Analise cada par e marque na casinha se os números não tiverem fator primo em comum. Depois conte o número de casinhas marcadas e divida por 9604 (que é o número de casas da tabela, 98 x 98). Essa é a probabilidade de um par ordenado de números naturais entre 2 e 99 não terem fator comum. Assim, para os pares ordenados envolvendo apenas números de 2 a 10, a probabilidade de um par ordenado ter números sem fator comum é de 44/81 = 0,54..., ou seja, um pouco mais do que a metade.

[067] Dizemos que dois números naturais maiores do que 1 são co-primos se não tiverem fator comum. Um par (ordenado ou não) de dois números sem fator comum é chamado de par co-primo. Como na segunda parte do Experimento 1, você pode usar os dados numerados de 0 a 9 para sortear pares de números. Para sortear um número de 0 a 99, jogue dois dados desses, mas defina antes qual dos dados vai definir o dígito da dezena e qual vai definir o dígito da unidade. Fazendo a jogada de novo, você obterá o segundo número. Se der 00 ou 01, para algum dos números, anule a jogada. Faça muitas rodadas, anotando, e veja a frequência de pares co-primos em seus lançamentos.

[068] Utilizando um dado de 10 faces e dois dados simples grandes em duas cores, se pode investigar qual seria a chance de dois colegas de turma fazerem aniversário no mesmo dia. Pegue 1 dado de 10 faces e mais dois dados comuns (de 6 faces cada um), com cores diferentes. Agora um jogo desses 3 dados é uma tripla $(x1\ ,\ x2\ ,\ x3\ )$ em $x\ 1\ x\ 2$

x 3 que *x* é a saída do dado de 10 faces, que pode ser um número de 0 a 9, *x* é a saída *x1 x2* do dado comum de uma das cores, que pode ser um número de 1 a 6, e *x* é a saída *x3* do outro dado comum, da outra cor, também um número de 1 a 6. Há 10 *x*6 *x*6 = 360 possibilidades de triplas, e podemos pensar que cada uma delas representa um dia do ano. Ok, o ano não tem 360 dias, mas 365 é relativamente muito próximo disso. Nesse ano esquisito de 360 dias, podemos pensar que o primeiro número representa o mês (é um ano de 10 meses, numerados de 0 a 9), o segundo número representa uma semana (cada mês teria 6 semanas) e o terceiro número representa o dia da semana (cada semana teria 6 dias). Você pode imaginar que está em outro planeta!

[069] Agora faça rodadas de 23 lançamentos desses 3 dados, anotando os resultados. Isto equivale a tomar 23 pessoas ao acaso e perguntar uma por vez suas datas de aniversário. Dá trabalho, mas tente fazer isso muitas vezes. Qual é a frequência de rodadas em que aparecem duas datas repetidas? A experiência pode ser feita de modo a se aproveitar melhor os resultados para analisar tamanhos de turmas diferentes. Primeiro obtenha uma longa série de lançamentos com os três dados, digamos 1000. Depois divida essa série em grupos de *N* lançamentos, onde *N* vai ser o tamanho de turma que você quer analisar. Por exemplo, na instrução anterior, seria *N = 23*. Mas você pode tomar *N = 30*, *N = 40*, *N = 50*. Em turmas de 50 pessoas, é comum ter duas aniversariando no mesmo dia?

[070] Utilizando 03 dados com 3 números cada, podemos testar as propriedades inusitadas dos dados não transitivos na prática. São 3 dados, chamados de A (com

números 2, 4 e 9), B (com números 1, 6 e 8) e C (com números 3, 5 e 7). Na competição entre dois quaisquer deles, em que ganha uma rodada aquele que sair com o número mais alto, um tem probabilidade de vencer, enquanto o outro tem apenas probabilidade. Entre dois dados desses, diz-se que aquele que tem mais probabilidade de vencer ganha do outro. Aqui, A ganha de B, B ganha de C, e C ganha de A. Com um grupo de amigos, faça rodadas usando esses 3 dados, do seguinte jeito. Deixe um de seus amigos escolherem um dado e, em função do dado que ele escolheu, escolha um dado melhor (você terá que treinar para se lembrar rapidamente de qual escolha fazer). Jogue com ele(s) e anote os resultados. Se você fizer isso muitas vezes, deverá ganhar 5 de cada 9 jogadas, aproximadamente.

[071] Utilizando o dispositivo amigo secreto, podemos testar as probabilidades envolvidas num sorteio de amigo secreto com o dispositivo disponível no kit. Um sorteio de amigo secreto é uma permutação de seus participantes. Faça muitos sorteios do amigo secreto com o dispositivo e anote: (A) o número total de sorteios; (B) o número de sorteios que deram certo; um sorteio dá certo se ninguém tira a si mesmo, o que no aparato quer dizer que nenhuma bolinha volta para a casa de sua mesma cor; (C) o número de sorteios em que aparece um único ciclo; Pensando no momento da entrega dos presentes, um único ciclo ocorre quando o primeiro a dar presente é também o último a receber. Divida os números obtidos em (B) e (C) pelo número obtido em (A). De acordo com a teoria, o primeiro número deveria estar próximo de 0,36, e o segundo deveria estar perto de 1 = 0,14... .O que aconteceu?

[072] Utilizando 03 chocalhos, podemos descobrir quantas bolas estão dentro deles. Perceber que a probabilidade e a estatística servem para inferir a 'verdade' quando não se tem acesso direto a ela. O único jeito de saber quantas bolas de cada cor existem dentro dos chocalhos é experimentando e anotando, já que os chocalhos não podem ser abertos. Escolha um dos chocalhos. Sacuda-o e anote as cores das bolinhas que aparecem nas janelinhas. Faça isso muitas vezes e depois conte a proporção de vezes em que apareceram duas bolinhas de uma cor, duas bolinhas de outra cor e duas bolinhas de cores diferentes.

[073] A ideia aqui é usar suas informações para descobrir quantas bolas de cada cor estão dentro de cada chocalho. É preferível que você tente fazer sem a ajuda do texto, usando seus próprios conhecimentos, mas caso queira damos algumas dicas abaixo. Uma sugestão é montar uma tabela com as possibilidades (dentro do que é razoável caber no chocalho) e suas probabilidades, de acordo com o que está discutido no texto. Admite-se primeiro que só há duas cores de bolinhas em cada chocalho: quem duvidar pode experimentar muitas e muitas vezes e ver que nunca aparece uma terceira cor. Chamemos de azul e vermelho as cores das bolinhas, mesmo que elas sejam de outras duas cores. No texto, deduz-se a probabilidade *P* de saírem duas bolinhas azuis e a probabilidade P de saírem duas bolinhas vermelhas. Monte uma tabela onde na vertical estão indicadas as possibilidades para o número de bolas azuis e na horizontal as possibilidades para o número de bolas vermelhas. Monte uma tabela onde na vertical estão indicadas as possibilidades para o número de bolas azuis e

na horizontal as possibilidades para o número de bolas vermelhas.

[074] Embora a invenção tenha sido amplamente descrita, é óbvio para aqueles versados na técnica que várias alterações e modificações podem ser feitas visando aprimoramento do projeto sem que as referidas alterações não estejam cobertas pelo escopo da invenção.

REIVINDICAÇÕES

1) Kit Educacional de Matemática **caracterizado** pelo fato de compreender: no mínimo 10 (dez) dados comuns de 6 (seis) faces menores; no mínimo 02 (dois) dados comuns de 6 (seis) faces maiores, de duas cores diferentes; no mínimo 01 (um) dado em forma de octaedro, com marcação de 1 a 8; no mínimo 01 (um) dado em forma de dodecaedro com marcação de 1 a 12; no mínimo 01 (um) dado em forma de icosaedro, numerado de 1 a 20; no mínimo 02 (dois) dados de 10 faces numerados de 0 a 9; no mínimo 01 (um) dado em forma de cuboctaedro, sem marcação nas faces; no mínimo 02 (dois) dados em forma de octaedro marcados com 08 pontos cardeais; no mínimo 01 (um) tabuleiro com desenho quadriculado em toda a sua superfície; folhas de papel milimetrado; no mínimo 03 (três) dados em forma de cubo com as marcações numerais: 2-4-9, 1-6-8, 3-5-7 ou com outras combinações probabilísticas; no mínimo 01 (um) dispositivo denominado de “amigo secreto” (1); no mínimo 03 (três) dispositivos denominados “chocalho”.

2) Kit, de acordo com a reivindicação 1, **caracterizado** pelo fato do dispositivo “amigo secreto” (1) apresentar formato retangular, compreendendo porção superior (1a) e porção inferior (1b), possuindo no mínimo 07 (sete) orifícios de formato circular na junção da porção superior (1a) com a porção inferior (1b); contendo no mínimo 07 (sete) bolas/esferas coloridas (2), todas de cores distintas em seu interior oco; possuindo na face superior (1a) do dispositivo no mínimo 07 (sete) marcações de formato circular (3) coincidindo com as cores das esferas coloridas (2) contidas no seu interior, sendo obrigatoriamente as cores distintas entre si; e existindo

sempre o mesmo número de orifícios, marcações circulares (3) e bolas/esferas coloridas (2).

3) Kit, de acordo com a reivindicação 1, **caracterizado** pelo fato do dispositivo "chocalho" ser oco e apresentar formato cilíndrico, sendo a metade superior com formato cilíndrico de maior diâmetro (4), na proporção de cerca de 3:1 da outra metade, inferior, que possui diâmetro menor (5), apresentando na metade inferior dois orifícios de formato circular (6); possuindo no seu interior esferas/bolas.

4) Kit, de acordo com a reivindicação 3, **caracterizado** pelo fato dos dispositivos "chocalho" apresentarem cores distintas entre si, e conterem 04, 05 ou 06 esferas/bolas em duas cores A e B, sendo que o chocalho de 04 esferas apresenta duas esferas da cor A e duas da cor B; o chocalho de 05 esferas apresenta duas esferas da cor A e três da cor B; e o chocalho de 06 esferas apresenta quatro esferas da cor A e duas da cor B.

RESUMO

KIT EDUCACIONAL DE MATEMÁTICA

O presente modelo de utilidade se refere a um kit educacional de matemática, destinado a introduzir/explicar conceitos básicos sobre probabilidade através do manuseio de seus elementos, tais como dados, dispositivo "amigo secreto", dispositivo "chocalho", papel milimetrado e tabuleiro, que pode ser utilizado tanto em ambiente escolar, quanto em outros locais, tais como a residência do aluno.

Figura 1

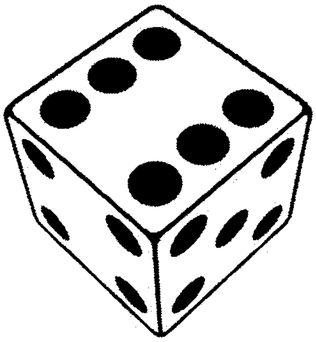


Figura 2

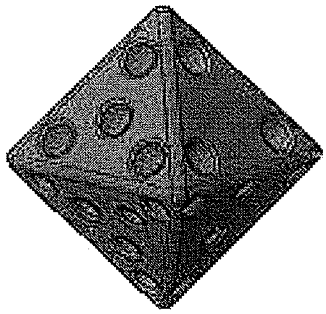


Figura 3

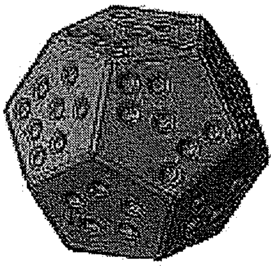


Figura 4

Figura 5

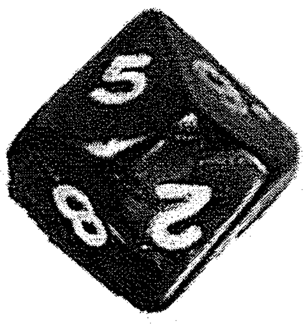


Figura 6

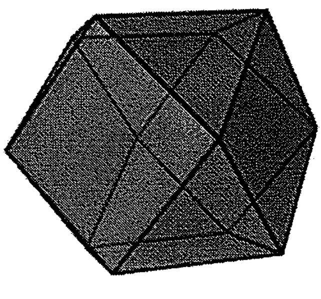


Figura 7

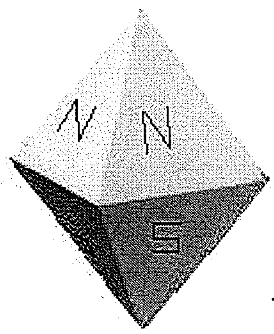


Figura 8

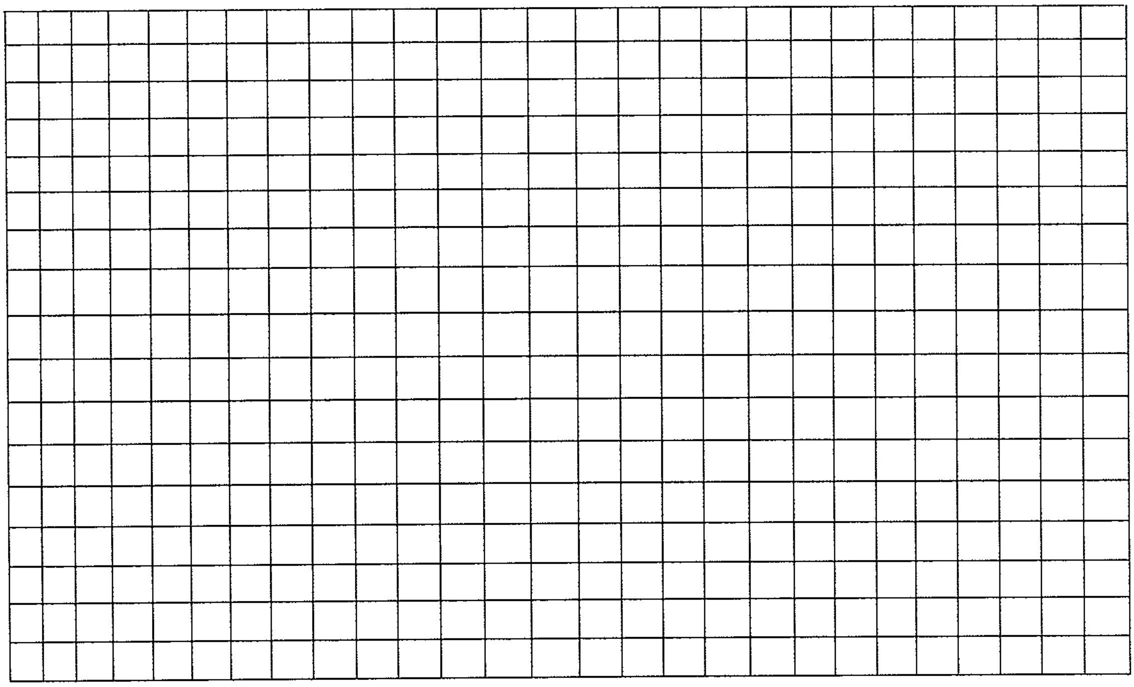


Figura 9

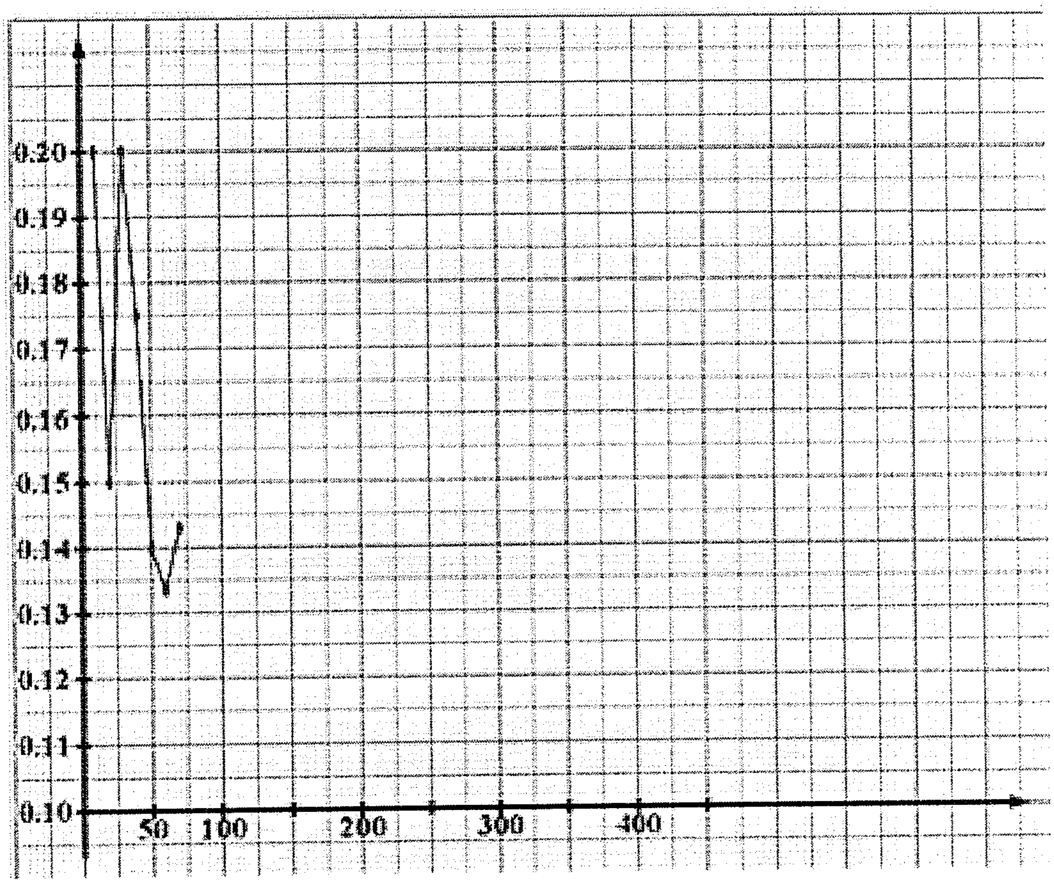


Figura 10

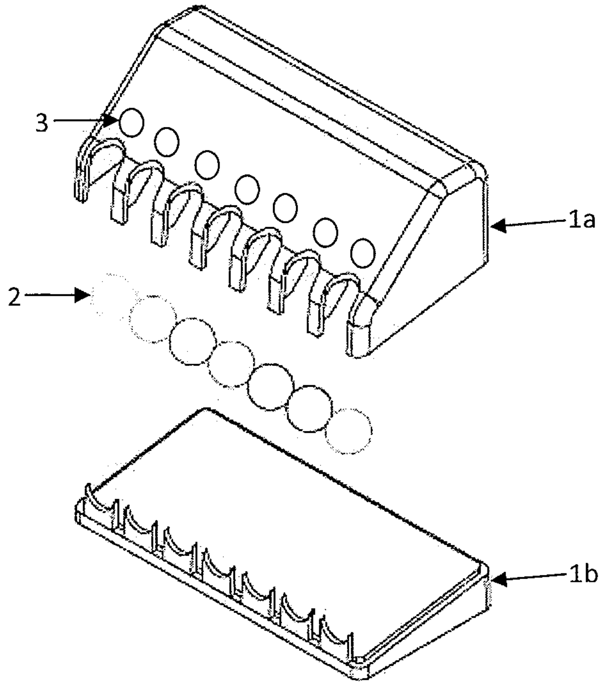


Figura 11

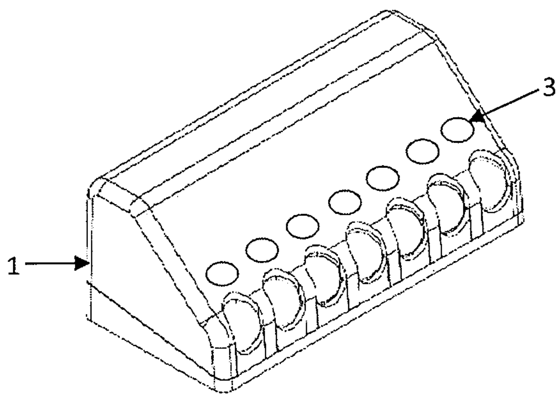


Figura 12

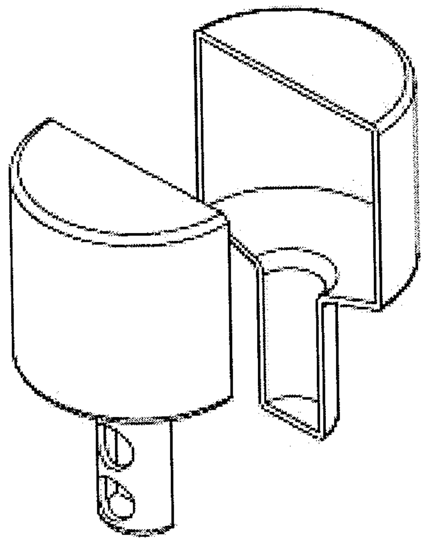


Figura 13

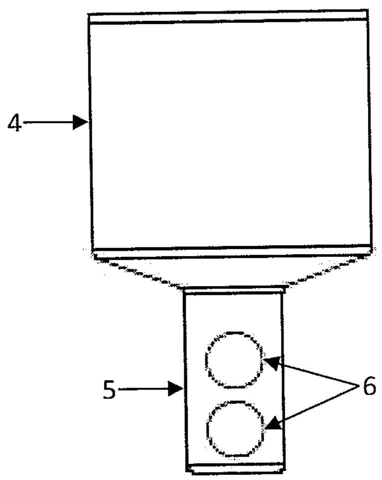
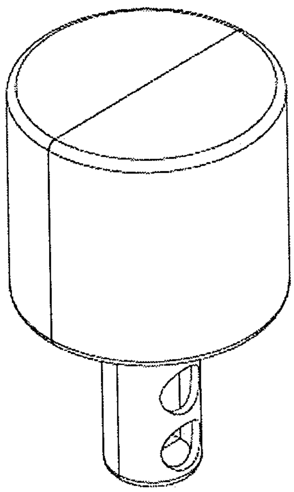


Figura 14



RESUMO

KIT EDUCACIONAL DE MATEMÁTICA

O presente modelo se utilidade se refere a um kit educacional de matemática, destinado a introduzir/explicar conceitos básicos sobre probabilidade através do manuseio de seus elementos, tais como dados, dispositivo "amigo secreto", dispositivo "chocalho", papel milimetrado e tabuleiro, que pode ser utilizado tanto em ambiente escolar, quanto em outros locais, tais como a residência do aluno.

Figura 1

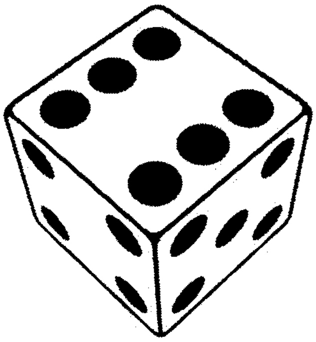


Figura 2

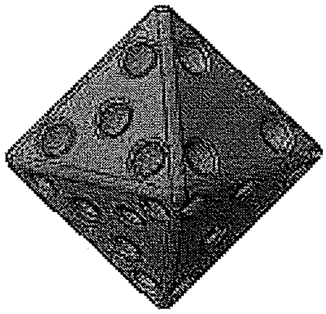


Figura 3

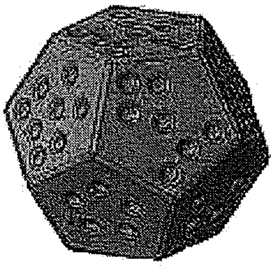


Figura 4

Figura 5

Figura 6

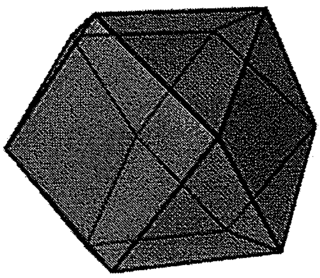


Figura 7